

**ОБ ИЗГИБЕ УПРУГИХ БАЛОК НА УПРУГО-ПОЛЗУЧЕМ ОСНОВАНИИ  
ПОПЕРЕЧНЫМИ И ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ**

УДК 539.3

DOI: 10.56246/18294480-2023.15-10

**КУТУЗЯН НЕЛЛИ**

*Кандидат физико-математических наук, доцент  
Проректор Гаварского государственного университета*

электронная почта: [nkutuzyan@gmail.com](mailto:nkutuzyan@gmail.com)

**ШЕКЯН ЛАВРЕНТИЙ**

*Член корреспондент инженерной Академии Армении,  
доктор физико-математических наук, профессор*

электронная почта: [lshekyan@mail.ru](mailto:lshekyan@mail.ru)

**Приведены результаты теоретического исследования контактных задач теории ползучести об изгибе поперечными и продольными силами упругих балок на упруго-ползучем основании. Исследование проведено при совместном применении теории упругих пластин и оболочек С.П. Тимошенко [1] об изгибе балок (пластин при цилиндрическом изгибе), находящихся под одновременном действии поперечных (изгибающих) и продольных (сжимающих или растягивающих) осевых сил, а также теории наследственной ползучести Н.Х. Арутюняна [2] с учётом старения материала основания.**

**Проблемы, связанные с исследованием конструкций, лежащих на деформируемом основании, представляют собой одну из сложных и наиболее интересных задач механики. Обширные классы задач об изгибе тонкостенных элементов в виде балок, плит, оболочек на деформируемых основаниях различных форм и в рамках различных физических допущений, тесно примыкают к классическим контактным задачам теории упругости, пластичности и ползучести. Такие задачи, ввиду их актуальности и практической значимости, стали предметом исследования многих авторов, в частности [3,4].**

**Рассматриваемые здесь задачи формулированы в виде линейного интегрального уравнения относительно нормальных контактных давлений, действующих в области контакта основания и балок. Оно представляет собой сингулярное интегральное уравнение (СИУ) по пространственной координате и интегральное уравнение Вольтерра (ИУВ) по времени [5]. Эффективное решение указанного СИУ получено путем непосредственного применения к ним численно-аналитического метода [6], основанного на формулах Гаусса для интегралов типа Коши и обычных интегралов с привлечением математического аппарата многочленов Чебышева. Решение указанного ИУВ представлено резольвентой ядра ползучести [2].**

**Ключевые слова:** изгиб упругих балок, упруго-ползучее основание, поперечные и продольные силы, контактное давление.

**1. Основное реологическое соотношение для упруго-ползучего основания.** Для исследования деформаций основания, в качестве базовой физической модели принимаем теорию наследственной ползучести с учетом старения материала основания [2]. Согласно этой теории, основное реологическое соотношение между напряжением  $\sigma(t)$  и деформацией  $\varepsilon(t)$  при одноосном растяжении (или сжатии) материала основания в момент времени  $t$  имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_1(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_1(\tau)} + C(t, \tau) \right] \sigma(\tau) d\tau, \quad (t \geq \tau_0) \quad (1)$$

где  $E_1(t)$  - модуль упругости материала основания:  $E_1(t) = E_1 \cdot [1 - \beta e^{-\alpha t}]$ ,  $\tau_0$  - возраст материала основания в момент приложения нагрузки,  $\tau$  ( $\tau_0 \leq \tau \leq t$ ) - его текущий возраст,  $C(t, \tau)$  - мера ползучести материала основания от единичной нагрузки, зависящая от возраста  $\tau$  и от наследственности  $(t - \tau)$  вида

$$C(t, \tau) = \left( C_0 + \frac{A_0}{\tau} \right) \cdot [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma, \tau_0, A_0, C_0$  и  $E_1$  постоянные.

Согласно основным предположениям рассмотренной теории ползучести [2], коэффициент Пуассона материала основания  $\nu_1(t)$  считается постоянным  $\nu_1(t) = \nu_1 = const$ . Для простоты расчетов, также предположим, что модуль упругости материала основания  $E_1(t)$  не меняется со временем  $E_1(t) = E_1 = const$ . Тогда соотношение (1) может быть представлен в следующей операторной форме

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_1} (I - L) \sigma(t), \quad (t \geq \tau_0) \quad (3)$$

где  $I$  - единичный оператор [ $Iy(t) \equiv y(t)$ ], а  $L$  - интегральный оператор Вольтерра вида

$$Ly(t) \equiv E_1 \int_{\tau_0}^t \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} C_0(t, \tau) \right] y(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Следует отметить, что во многих случаях соотношение (1) рассматривается как интегральное уравнение Вольтерра относительно  $\sigma(t)$ . Тогда решение уравнения (1) относительно  $\sigma(t)$  можно представить в виде

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) E_1(t) + \int_{\tau_0}^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (t \geq \tau_0) \quad (5)$$

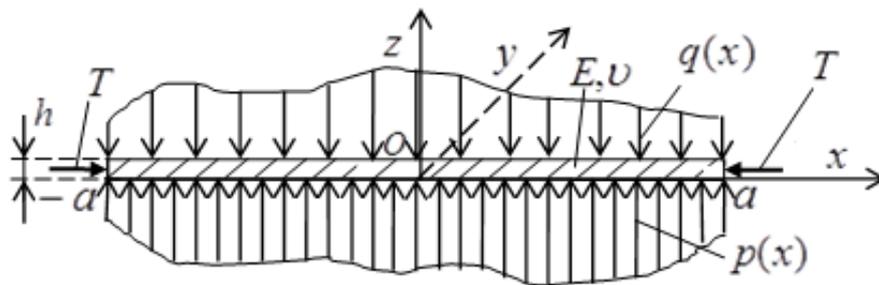
где  $R(t, \tau)$  резольвента ядра  $\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_1(\tau)} + C(t, \tau) \right]$ , которая выражается через специальные функции [2] и является мерой релаксации материала основания.

**2. Дифференциальное уравнение изгиба упругой балки при совместном действии поперечных и продольных сил.** Пусть горизонтальная упругая балка длиной  $2a$  изгибается под действиям некоторых вертикальных сжимающих сил  $q(x, t)$  и  $p(x, t)$  а также горизонтальных осевых сил  $T$ ,

приложенных на концах срединной линии балки в момент времени  $t = \tau_0$  (фиг. 1). Дифференциальное уравнение такого сложного изгиба балки получается из общего дифференциального уравнения изгиба прямоугольной пластинки при совместном воздействии поперечных сил и сил срединной плоскости пластинки, находящейся в условиях плоской деформации с базовой плоскостью  $Oxz$  ([1], стр.422, формула 217,  $T = -N_x, N_y = N_{xy} = 0$ ). Оно имеет вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, t) - q(x, t), \quad (-a < x < a, \quad t \geq \tau_0). \quad (6)$$

Здесь  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  - изгибная жесткость пластины, гнущейся по цилиндрической поверхности, представляет собой жесткость балки-полоски прямоугольного поперечного сечения единичной ширины при плоской деформации ( $\varepsilon_y = 0$ ),  $E$  - её модуль упругости,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $h$  - высота, а  $w(x, t)$  - вертикальные смещения точек балки ( $-a \leq x \leq a, \quad t \geq \tau_0$ ). В случае плоского напряженного состояния, жесткость на изгиб балки прямоугольного поперечного сечения единичной ширины выражается формулой  $D = Eh^3/12$ .



Фиг. 1 Схема нагруженной одинарной балки

Решение дифференциального уравнения (6) при  $0 < k < \pi/2a$ , где  $k = \sqrt{T/D}$ , имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a H(x, s) [p(s, t) - q(s, t)] ds + C, \quad (-a < x < a, \quad t \geq \tau_0) \quad (7)$$

где  $C$  – константа интегрирования,

$$H(x, s) = [1 - \cos[k(x-s)]] \operatorname{sign}(x-s) + \operatorname{ctg}(ka) [1 - \cos(kx)] \sin(ks) - \operatorname{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks). \quad (8)$$

В случае  $k = \pi/2a$ , получим  $T = (\pi/2a)^2 D$ . Это первое критическое значение осевых сжимающих сил  $T$ , полученное формулой Эйлера [1] устойчивости сжатого стержня, когда изгибающие моменты в концевых точках балки  $x = \pm a$  отсутствуют.

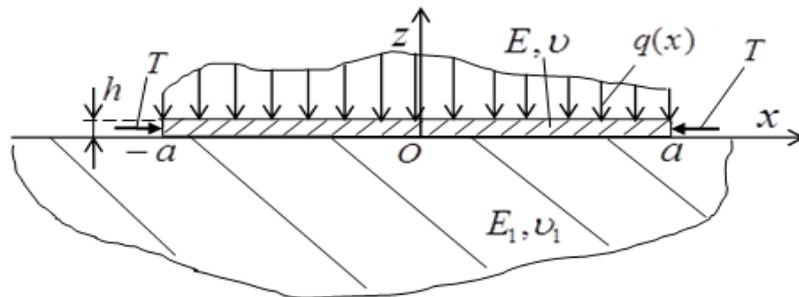
В случае  $k > \pi/2a$  имеем  $T > (\pi/2a)^2 D$ . Тогда балка потеряет устойчивость, независимо от наличия поперечных нагрузок  $p(x, t)$  и  $q(x, t)$ .

В случае осевых растягивающих сил, следует в формуле (6) вместо коэффициента  $T$  поставить  $-T$ . При этом, в формуле (8) и в последующих всех формулах, вместо тригонометрических функций появятся соответствующие гиперболические функции.

### 3. Изгиб упругой балки на упруго-ползучей полуплоскости.

Рассмотрим контактную задачу об изгибе упругой балки длиной  $2a$  на упруго-ползучей полуплоскости, когда с момента времени  $t = \tau_0$  балка находится под действием вертикальных сжимающих сил  $q(x, t)$  и горизонтальных осевых сил  $T$ , приложенных на концах срединной линии (фиг. 2). Учитывая реологическое соотношение (3) и результаты работы [7], решение задачи сводится к следующему интегральному уравнению относительно контактного давления  $p(x, t)$  ( $-a < x < a$ ,  $t \geq \tau_0$ ), действующий в области контакта упруго-ползучего основания с балкой

$$\frac{2(1-\nu_1^2)(I-L)}{\pi E_1} \int_{-a}^a \frac{p(s, t) ds}{s-x} = -\frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a H(x, s) [p(s, t) - q(s, t)] ds + C. \quad (9)$$



Фиг. 2 Схема контакта балки и упруго-ползучей полуплоскости

Интегральное уравнение (9) является одновременно сингулярное интегральное уравнение по пространственному координату  $x$  относительно  $(I-L)p(x, t)$  и регулярное интегральное уравнение Вольтерра относительно  $p(x, t)$  по координату времени  $t$  [5]. Эффективное решение указанного сингулярного интегрального уравнения получается аналогично [7], где применяется численно-аналитический метод [6], основанный на формулах Гаусса для интегралов типа Коши и обычных интегралов с привлечением математического аппарата

многочленов Чебышева. В окрестностях концевых точек балки  $x = \pm a$  оно имеет корневую особенность вида

$$(I-L)p(x,t) = \Phi(x,t)/\sqrt{a^2-x^2}, \quad (-a < x < a, \quad t \geq \tau_0), \quad (10)$$

где  $\Phi(x,t)$  - регулярная функция, притом  $\Phi(\pm a,t) \neq 0$ .

Соотношение (10) в свою очередь представляет собой интегральное уравнение Вольтерра относительно  $p(x,t)$  [5]. Решение этого интегрального уравнения, согласно (5), представляем резольвентой ядра ползучести [2]

$$p(x,t) = \frac{\Phi(x,t)}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int_{\tau_0}^t R(t,\tau)\varepsilon(\tau)dt, \quad (-a < x < a, \quad t \geq \tau_0). \quad (11)$$

Следует отметить, что в случае абсолютно жесткой балки ( $E = \infty$ ) интегральное уравнение (9) совпадает с интегральным уравнением плоской контактной задачи для упруго-ползучей полуплоскости и штампа [8].

**3. Изгиб симметрично нагруженных двух одинаковых упругих балок на упруго-ползучей полуплоскости.** Проводим результаты теоретического исследования плоской контактной задачи для двух одинаковых упругих балок и упруго-ползучей нижней полуплоскости  $z \leq 0$ , контактирующих вдоль системы участков  $[-a, -b] \cup [b, a]$  граничной горизонтальной оси  $Ox$  (фиг. 3).

Предполагается, что с момента времени  $t = \tau_0$ , балки находятся под действиям заданной, симметрично относительно оси  $Oz$ , распределенной поперечной нагрузки  $q(x,t)$  и одинаковой по величине осевых сжимающих сил  $T$ , приложенных на концевых точках  $x = \pm a$  и  $x = \pm b$  срединных линий балок.

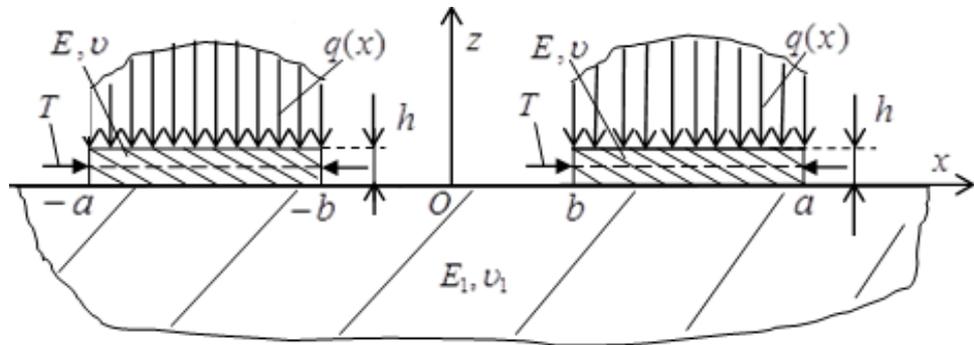
Дифференциальное уравнение сложного изгиба горизонтальной правой балки, находящейся с момента времени  $t = \tau_0$  под действиям поперечных сил  $q(x,t)$  и  $p(x,t)$  ( $b \leq x \leq a$ ), а также сжимающих сил  $T$ , приложенных на концах её срединной линии (см. фиг. 1), имеет вид (6), а его решение относительно  $\partial w / \partial x$ , аналогично (7), выражается формулой

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(I-L)}{2k^2 D} \int_b^a \Phi_2(x,s)[p(s,t) - q(s,t)] ds + C, \quad (b < x < a, \quad t \geq \tau_0), \quad (12)$$

где  $\Phi_2(x,s)$  - регулярная функция. Тогда решение рассмотренной плоской контактной задачи для двух одинаковых упругих балок и упруго-ползучей нижней полуплоскости сводится к решению следующего интегрального уравнения относительно  $p(x,t)$

$$-\frac{2(1-\nu_1^2)(I-L)}{\pi E_1} \int_b^a \left( \frac{1}{s-x} + \frac{1}{s+x} \right) p(s,t) ds = \frac{1}{2k^2 D_b} \int_b^a \Phi_2(x,s) [p(s,t) - q(s,t)] ds + C,$$

$$(b < x < a, \quad t \geq \tau_0).$$
(13)



Фиг. 3. Схема контакта двух упругих балок с упруго-ползучей полуплоскостью.

Далее введем безразмерные координату и функцию

$$\xi = \frac{2x}{a-b} - \frac{a+b}{a-b}, \quad \phi_2(\xi, t) = \frac{1}{E_1} p \left( \frac{a-b}{2} \xi + \frac{a+b}{2}, t \right) \quad (-1 < \xi < 1, \quad t \geq \tau_0), \quad (14)$$

в результате, интегральное уравнение (7) принимает вид

$$\frac{(I-L)}{\pi} \left[ \int_{-1}^1 \frac{\phi_2(\eta, t) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{k^2} \int_{-1}^1 K_2(\xi, \eta) \phi_2(\eta, t) d\eta \right] = \frac{\lambda}{\pi k^2} f_2(\xi, t) + \gamma,$$

$$(-1 < \xi < 1, \quad t \geq \tau_0)$$
(15)

где  $K_2(\xi, \eta)$  и  $f_2(\xi, t)$  - известные регулярные функции.

Решение интегрального уравнения (15) относительно  $\phi_2(\xi, t)$  получается аналогично (13), указанном выше численно-аналитическим методом [6] и с помощью формулы (5). Оно имеет корневую особенность вида (11) в окрестностях концевых точек  $\xi = \pm 1$ . Отметим, что учитывая (14) нетрудно убедиться, что решение интегрального уравнения (13) относительно  $p(x, t)$  в окрестностях концевых точек  $x = \pm a$  и  $x = \pm b$  балок также имеет корневую особенность вида (11).

### Список использованной литературы

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С., Пластины и оболочки, М., Наука, 1966, 636 с.

2. Арутюнян Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести, М.-Л., ГИТТЛ, 1952, 323 с.
3. Власов В. З., Леонтьев Н. Н., Балки, плиты и оболочки на упругом основании, М., Физматгиз, 1960, 491 с.
4. Коренев Б.Г., Вопросы расчета балок и плит на упругом основании, М., Госстройиздат, 1954, 232 с.
5. Трикоми Ф., Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960, 300 с.
6. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl. Math., vol. 35, №1, 1997. P. 173-185.
7. Амирбебян А. Н., Мкртчян М. С., Мхитарян С. М., Шекян Л. А., О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учетом сил в ее срединной линии, Изв. НАН Армении, Механика, т. 67, №1, 2014. с. 6-21.
8. Прокопович И., О решении плоской контактной задачи с учётом ползучести // Прикладная математика и механика, т. 20, вып. 6, 1956, с. 680-687.

**ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ-ՍՈՂԱԳՈՂ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ԾՎՈՒՄԸ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԵՎ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒԺԵՐՈՎ**

**ԿՈՒՏՈՒԶՅԱՆ ՆԵԼԼԻ**

*Գալանի պետական համալսարանի պրոռեկտոր,  
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ*

Էլփոստ՝ [nkutuzyan@gmail.com](mailto:nkutuzyan@gmail.com)

**ՇԵԿՅԱՆ ԼԱՎՐԵՆՏԻ**

*ՀՀ ՃԱ թղթ. անդամ, ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր*

Էլփոստ՝ [lshekyan@mail.ru](mailto:lshekyan@mail.ru)

Բերված են առաձգական-սողացող հիմքի վրա առաձգական հեծանների լայնական և երկայնական ուժերով ճկման վերաբերյալ սողքի տեսության կոնտակտային խնդիրների տեսական ուսումնասիրության արդյունքները: Ուսումնասիրությունն իրականացվել է՝ համատեղ կիրառելով Ս. Պ. Տիմոշենկոյի՝ լայնական (ծռող) և երկայնական (սեղմող կամ ձգող) ուժերի միաժամանակյա ազդեցությամբ հեծանների ճկման (սալերի գլանաձև ճկման) վերաբերյալ թաղանթների և սալերի տեսությունը, ինչպես նաև Ն. Խ. Հարությունյանի՝ սողքի ժառանգականության տեսությունը՝ հիմքի նյութի ծերացման հաշվառմամբ:

Դեֆորմացվող հիմքի վրա ընկած կառույցների ուսումնասիրության հետ կապված խնդիրները մեխանիկայի ամենաբարդ և ամենահետաքրքիր խնդիրներից են: Տարբեր ձևեր ունեցող դեֆորմացվող հիմքերի վրա հեծանների, սալերի, թաղանթների տեսքով և տարբեր ֆիզիկական ենթադրություններով բարակ պատերով տարրերի ճկման խնդիրների լայն դասերը սերտորեն կապված են առաձգականության, պլաստիկության և սողքի տեսության դասական կոնտակտային խնդիրների հետ: Այդպիսի խնդիրներն իրենց արդիականության և գործնական նշանակության պատճառով դարձել են բազմաթիվ հեղինակների ուսումնասիրության առարկա, մասնավորապես [3,4]:

Այստեղ դիտարկված խնդիրները ձևակերպված են գծային ինտեգրալ հավասարման տեսքով առաձգական-սողացող հիմքի և առաձգական հեծանների միջև հպման տարածքում գործող հպակային ճնշումների նկատմամբ: Այն հանդիսանում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարում (ՍԻՀ)՝ ըստ տարածական կոորդինատի, և Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարում (ՎԻՀ)՝ ըստ ժամանակի [5]: Նշված ՍԻՀ-ի արդյունավետ լուծումը ստացվել է նրա վրա ուղղակիորեն կիրառելով թվային-վերլուծական մեթոդը [6]՝ հիմնված Կոշիի տիպի ինտեգրալների և սովորական ինտեգրալների՝ Գաուսի բանաձևերի վրա՝ օգտագործելով Չեբիշևի բազմանդամների մաթեմատիկական ապարատը: Նշված ՎԻՀ-ի լուծումը ներկայացված է սողքի կորիզի ռեզուլվենտայի միջոցով [2]:

**Բանալի բառեր՝** առաձգական հեծաններ, ճկում, առաձգական-սողացող հիմք, լայնական և երկայնական ուժեր, հպակային ճնշումներ:

## **ON BENDING OF ELASTIC BEAMS ON ELASTIC-CREEPING BASE BY TRANSVERSE AND LONGITUDINAL FORCES**

**KUTUZYAN NELLI**

*PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor*

*Vice-Rector of Gavar State University*

e-mail: [nkutuzyan@gmail.com](mailto:nkutuzyan@gmail.com)

**SHEKYAN LAVRENTI**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor*

*Corresponding Member of the Engineering Academy of Armenia,*

e-mail: [lshekyan@mail.ru](mailto:lshekyan@mail.ru)

The results of a theoretical study that examines how linearly deformable beams placed on an elastic-creeping foundation respond when subjected to both transverse and longitudinal forces in the context of creep theory are presented.

The study was carried out with the joint application of the theory of elastic plates and shells by S.P. Timoshenko [1] about the bending of beams (plates in cylindrical bending) under the simultaneous action of transverse (bending) and longitudinal (compressive or tensile) axial forces, as well as the theory of hereditary creep by N.Kh. Harutyunyan [2], taking into account base material aging.

The problems associated with the study of structures lying on a deformable foundation are one of the most urgent, complex and most interesting problems in mechanics. Extensive classes of problems involving the bending of thin-walled elements such as beams, plates, shells on deformable foundations of various shapes and under various physical assumptions are closely adjacent to the classical contact problems of the theory of elasticity, plasticity and creep. Such problems, due to their relevance and practical significance, have become the subject of research by many authors, in particular [3,4].

The problems considered here are formulated in the form of a linear integral equation with respect to the contact pressures acting in the area of contact between the elastic-creeping base and elastic beams. It is a singular integral equation in spatial coordinate, and a Volterra integral equation (VIE) in time [5]. An effective solution of the indicated SIE was obtained by directly applying to them the numerical-analytical method [6], based on the Gauss formulas for Cauchy-type integrals and ordinary integrals, using the mathematical apparatus of Chebyshev polynomials. The solution of the specified VIE is represented by the creep kernel resolvent [2].

**Keywords:** *elastic beams, bending, elastic-creeping base, transverse and longitudinal forces, contact pressures.*

Հոդվածը ներկայացվել է խմբագրական խորհուրդ 15.01.2023թ.:

Հոդվածը գրախոսվել է 02.02.2023թ.:

Ընդունվել է տպագրության 17.11.2023թ.: